1068. 有限群ノ induced representation ニツイテ

大島　勝（高知高校）

§1. induced character ノ積

定理1. 有限群 $\mathfrak{G}$ ノ正規表現ヲ R トスル。∇ ヲ $\mathfrak{G}$ ノ任意ノ表現トスルトキ

$$\nabla \times R \sim \begin{pmatrix} R & & & 0 \\ & R & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & R \end{pmatrix}$$

コヽニ右辺ニハ R ハ丁度 ∇ ノ次数ダケ現ハレル。

本定理ハ筆者ガ昨年証明シタモノデアルガ（學士院記事参照）最近此ノ定理ヲ拡張スルコトガ出来タノデ、ソレニ関聯シタコトヲ若干述ベル。

$\mathfrak{H}$ ヲ $\mathfrak{G}$ ノ部分群トシ $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ ノ位数ヲ夫々 g, h トスル。$m = g/h$

(1) $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}G_1 + \mathfrak{H}G_2 + \cdots\cdots + \mathfrak{H}G_m, \quad G_1 = E$

$\mathfrak{H}$ ノ表現 D ヨリ induce シタ $\mathfrak{G}$ ノ表現ヲ D^* デ表ハス。又 ∇ ヲ $\mathfrak{G}$ ノ表現トスルトキ $H \subset \mathfrak{H}$ ナル H ニ對シテ $H \longrightarrow \nabla(H)$ トスレバ $\nabla(H)$ ノ全体ハ $\mathfrak{H}$ ノ表現ヲナス。コレヲ $\nabla(\mathfrak{H})$ デ表ハスコトニスル。

定理2. $\nabla \times D^* \sim (\nabla(\mathfrak{H}) \times D)^*$

（証明）定理1ノ証明ト全然同様ニシテ出来ル。即チ

$$
M_k = \begin{pmatrix} \nabla(G_k) & & & 0 \\ & \nabla(G_k) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \nabla(G_k) \end{pmatrix}
$$

(但シ $\nabla(G_k)$ ノ個数ハ D ノ次数ダケ現ルコトニスル)トスルトキ

$$
P = \begin{pmatrix} M_1 & & & 0 \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & M_m \end{pmatrix}
$$

ト置ケバ $\mathfrak{G}$ ノ元 G ニ對シテ

$$
P^{-1}(\nabla(G)\times D^*(G))P = \mathbb{W}^*(G)
$$

トナルコトガ分ル. コヽニ $\mathbb{W}$ ハ $\mathfrak{H}$ ノ表現 $\nabla(\mathfrak{H})\times D$ ヲ表ハス. 但シコノトキ次ノ *Lemma* ガ入用デアル.

Lemma. A, B ヲ二ツノ *matrix* トシ B ノ次数ヲ n トスレバ

$$
(P^{-1}AP)\times B = Q^{-1}(A\times B)Q
$$

コヽニ Q ハ

$$
Q = \begin{pmatrix} P & & & 0 \\ & P & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & P \end{pmatrix}
$$

ナル行列デ, P ノ個数ハ丁度 n 個.

(注意1) $\mathfrak{H} = E$ ナルトキガ定理ノデアル。

（注意2） 基礎体kノ標数ガ零又ハgト素ナルトキハ単ニ指標ノ計算ノミニテ定理2ガ得ラレル。

以下簡単ノタメkノ標数ハ零又ハhト素デアルトスル。$\mathfrak{h}$ノ絶對既約表現ヲ$D_1, D_2, \cdots\cdots, D_t$トシ，$D_i$ヨリinduceシタ$\mathfrak{g}$ノ表現$D_i^*$ノ指標ヲ$\chi^{(i)}$デ表ハスコトニ久ル。

定理3. $D_i^* \times D_j^*$ハD_k^* $(k=1, 2, \cdots\cdots, t)$ニ分解サレル。從ツテ指標ノ方デ考ヘレバ

$$(2)\quad \chi^{(i)} \cdot \chi^{(j)} = \sum_{k=1}^{t} a_{ijk} \chi^{(k)}, \quad a_{ijk} \geqq 0 \text{ ハ有理整数}$$

§2. induced character ノ関係

$\mathfrak{g}$ノ共軛類ノ中$\mathfrak{h}$ノ元ヲ含ムモノヲ$C_1, C_2, \cdots\cdots, C_s$トスル。$\mathfrak{g}$ノ表現$D_i^*$ニ於テ$C_\kappa$ニ含マレル元ノ指標ヲ$\chi_\kappa^{(i)}$デ表ハス。

定理4. $$g_k \sum_{i=1}^{t} \chi_\kappa^{(i)} \chi_\lambda^{(i)} = m g\, \delta_{\kappa\lambda^*}$$

$$(\kappa = 1, 2, \cdots\cdots, s)$$

コヽニC_{λ^*}ハC_λニ含マルル元ノ逆元ヨリナル共軛類デアル。

（証明） 正田先生「抽象代数學」p. 361ト同様ノ方針デ出来ル。

定理5. D_k $(k=1, 2, \cdots\cdots, t)$ノ中一次独立ナルモノハ丁度$s$個即チ$\mathfrak{g}$ノ共軛類ノ中$\mathfrak{h}$ノ元ヲ含ム共軛類ノ

個數ニ等シイ。

〔証明〕 $X=(\chi_k^{(i)})$ ナル s 行 t 列ノ matrix ヲ考ヘレバ定理4ヨリ

$$X'X=(mg/g_k\ \delta_{k\lambda^*})=T$$

コヽニTハ s 次ノ matrix デ $|T|\neq 0$ 從ッテXノ階數ハ s トナル。

〔注意〕 本定理ハ既ニ中山氏ノ証明サレタモノデアル。(Ann. of Math. 39, P. 366参照)

以下 $\mathfrak{h}$ ガ $\mathfrak{g}$ ノ不変部分群ナルトキヲ考ヘル。$\mathfrak{g}$ ニ関シテ互ニ相似ナル表現ヲ klass ニ纏メレバ, klass ノ個數ハ丁度 s 個デアル. 從ッテ互ニ相似ナラザル $\mathfrak{h}$ ノ既約表現ヲ $\Delta_1, \Delta_2, \text{-----}, \Delta_s$ トシ, Δ_k ト相似ナ表現ノ個數ヲ r_k トスル. 定理4ニヨリ

$$(3)\quad g_\mu \sum_{k=1}^{s} r_k \chi_\mu^{(k)} \chi_\nu^{(k)} = mg\,\delta_{\mu\nu^*}$$

從ッテ

$$(4)\quad \sum_{\mu=1}^{s} g_\mu r_\lambda \chi_\mu^{(k)} \chi_{\mu^*}^{(\lambda)} = mg\,\delta_{k\lambda}$$

又ハ

$$(4)'\quad \sum_{H\subset\mathfrak{h}} r_\lambda \chi^{(k)}(H)\chi^{(\lambda)}(H^{-1}) = mg\,\delta_{k\lambda}$$

定理6. $\chi^{(\lambda)}$ ノ contragredient ナ指標ヲ $\chi^{(\lambda')}$ デ表ハス.

$$\begin{cases} \chi^{(\kappa)} \cdot \chi^{(\lambda)} = \sum_{\mu=1}^{s} a_{\kappa\lambda\mu} \chi^{(\mu)} \\ \chi^{(\mu)} \chi^{(\lambda')} = \sum_{\kappa=1}^{s} \widetilde{a}_{\kappa\lambda\mu} \chi^{(\kappa)} \end{cases}$$

トスレバ

$$r_\kappa a_{\kappa\lambda\mu} = r_\mu \widetilde{a}_{\kappa\lambda\mu}.$$

(証明) Brauer-Nesbitt ノ方法 (Ann. of Math. 42. P.579 参照) ト同様ニシテ証明出来ル。